Schaubilderanalyse

Teil 1 ab Klassenstufe 10.

Erkennen von Funktionen der Typen:
Ganzrational, gebrochen rational, exponentiell, Logarithmus- und Wurzelfunktionen, Sinus und Kosinus.

Große Aufgabensammlung

Hinweis: *Die Aufgabensammlung dieses Textes gibt es auch als eigenen Text mit der Nummer 18511*
Die Lösungen ebenfalls mit der Nummer 18512,

Datei Nr. 18510

Stand 7. April 2017

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.schule

Vorwort

Nachdem man die einzelnen Funktionsarten kennen gelernt hat, muss man auch in der Lage sein, Funktionen anhand ihres Schaubildes zu identifizieren. Dies passiert in Klassenstufe 10 wie auch in der Oberstufe und in der Abiturprüfung.

Dieser Text will dies vermitteln. Nach einführenden Grundlagen und Beispielen folgt eine große Aufgabensammlung. Es werden nicht weniger als 87 Schaubilder mit weit über 100 Kurven gezeigt.

Dabei gebe ich Kurvengleichungen aber auch Funktionsgleichungen als Ergebnisse an, selten beides.

Hinweis: Bei Exponential- und Logarithmuskurven verwende ich konsequent das charakteristische Trapez. Dieses wird für Logarithmuskurven im Text 18150 ab Seite 10 besprochen.

Bei den Exponentialfunktionen taucht es im Text 18200 ab Seite 38 auf. Dort findet man weitere Aufgaben zum aktuellen Thema.

Für Unterrichtszwecke sowie Moodle-Systeme gibt es die Aufgaben und ihre Lösungen auch als Einzeltexte.

Inhalt

1 Grundlagen

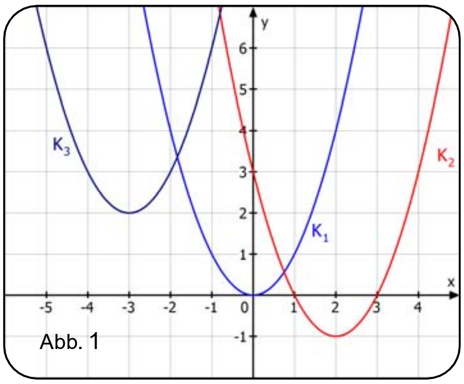
Zu Beginn wird an Hand einiger Beispiele erklärt, wie man vorgehen kann, um die Funktion, deren Graph dargestellt ist, zu identifizieren. Dazu muss man die Grundeigenschaften der Funktionen kennen, die in den entsprechenden „Basistexten“ dargestellt sind. Außerdem ist es ganz wichtig, dass man weiß, wie man Kurven verschiebt (Text 21100) und oft auch, wie man sie strecken kann.

1.1 Parabelfunktionen

Die (nicht gestreckte) Normalparabel hat die Gleichung $y=(x-a)^2+b$, mit dem Scheitel $S(a\,|\,b)$.

K_1: $S(0\,|\,0)$ $y=x^2$
K_2: $S(2\,|\,-1)$ $y=(x-2)^2-1$
K_3: $S(-3\,|\,2)$ $y=(x+3)^2+2$

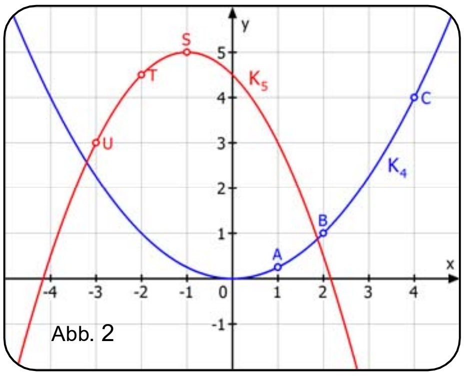
(x+3) bedeutet Verschiebung um 3 nach links.
(x-2) bedeutet Verschiebung um 2 nach rechts.



Die Kurven K_4 und K_5 haben einen Streckfaktor k für die y-Richtung in ihrer Gleichung:

K_4: $y=\frac{1}{4}x^2$ und K_5: $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2+5$

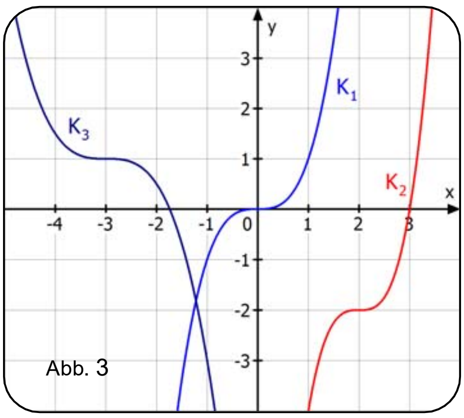
Bei K_4 erkennt man $k=\frac{1}{4}$ so:
Bei einer Normalparabel (ungestreckt) kann man vom Scheitel aus so weitere Punkte gewinnen:
Man geht um Δx zur Seite und dann um $\Delta y=\Delta x^2$ in Richtung der Parabelachse weiter:
Also um 1 zur Seite und um 1 nach oben, um 2 zur Seite und dann um 4 nach oben.
Bei K_4 folgt aus $\Delta x=2$ nicht $\Delta y=2^2=4$ nach oben sondern nur um 1, also wirkt hier der Streckfaktor $\frac{1}{4}$ mit (Punkt B). Das kann man bei C überprüfen: $\Delta x=4 \quad\Rightarrow\quad \Delta y=\frac{1}{4}\cdot\Delta x^2=\frac{1}{4}\cdot 4^2=\frac{1}{4}\cdot 16=4$.



Die Parabel K_5 hat den Streckfaktor $k=\frac{1}{2}$ und zusätzlich ein Minuszeichen, weil sie nach unten geöffnet ist.

1.2 Die Funktion $f(x)=x^3$

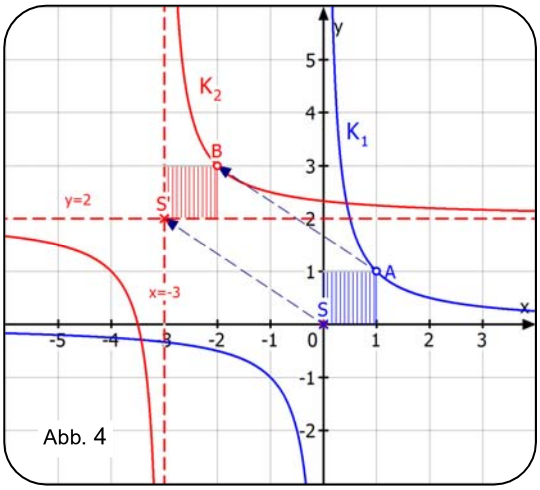
Ihr Schaubild ist K_1. Merkmal: K_1 hat im Ursprung einen Wendepunkt mit waagrechter Tangente und geht durch $A(1\,|\,1)$.
K_2 entsteht aus K_1 durch Streckung in y-Richtung mit dem Faktor k = 2 und anschließender Verschiebung:
$f_2(x)=2\cdot(x-2)^3-2$.
Für K_3 gilt entsprechend: $f_3(x)=-\frac{1}{2}(x+3)^3+1$



1.3 Einfache gebrochen rationale Funktionen:

Das Schaubild der **Grundfunktion** $f_1(x) = \frac{1}{x}$ ist K_1.
Diese Kurve

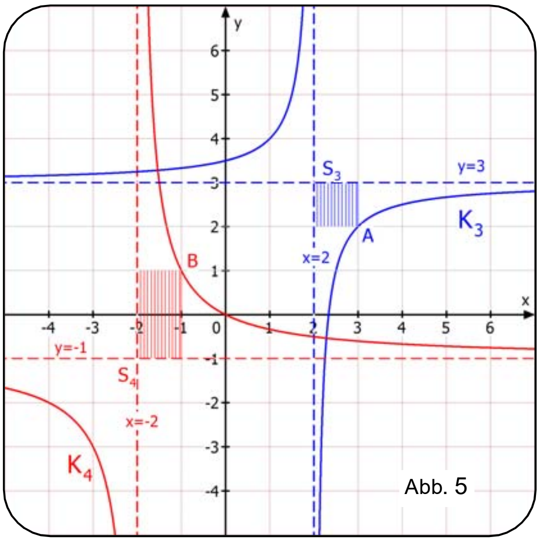
hat die senkrechte Asymptote x = 0 (y-Achse)
und die waagrechte Asymptote y = 0 (x-Achse)
und geht durch $A(1|1)$.



Die Kurve K_2 entsteht aus K_1 durch Verschiebung um 3 nach links (aus x wird x+3) und um 2 nach oben:

$$f_2(x) = \frac{1}{x+3} + 2 = \frac{1}{x+3} + \frac{2(x+3)}{x+3} = \frac{2x+7}{x+3}$$

Eine Streckung ist nicht dabei, was man am Punkt B erkennt bzw. am kleinen Quadrat durch den Schnittpunkt S der Asymptoten und durch A bzw. bei K_2 durch S' und B.



Die Kurve K_3 liegt rechts unter der waagrechten Asymptote. Also wird $y = \frac{1}{x}$ zuerst an der x-Achse gespiegelt zu $y = -\frac{1}{x}$.
Dann folgt die Verschiebung:

$$f_3(x) = -\frac{1}{x-2} + 3 = \frac{-1}{x-2} + \frac{3(x-2)}{x-2} = \frac{3x-7}{x-2}$$

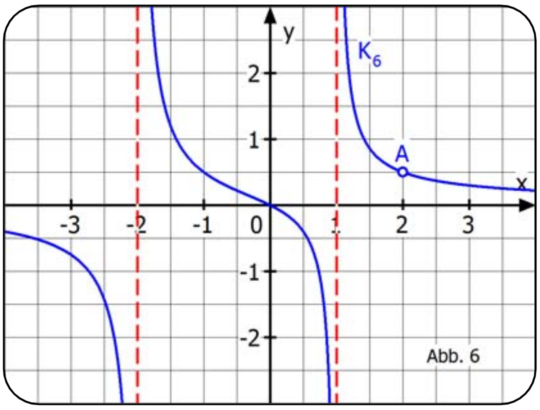
Die Kurve K_4 wurde vor der Verschiebung mit dem Faktor 2 in y-Richtung gestreckt.
Dies erkennt man am roten Rechteck.
Das blaue Quadrat in Abbildung 4 zu $y = \frac{1}{x}$ wird also in der Höhe verdoppelt und dann als Rechteck verschoben, so wie man es in Abb. 5 mit S_4 und B sieht.
Dabei geht also $y = \frac{1}{x}$ über in $y = \frac{2}{x}$. Dann wird verschoben:

$$\boxed{y = \frac{1}{x}} \xrightarrow[\text{in y-Richtung}]{\text{Streckung}} \boxed{y = \frac{2}{x}} \xrightarrow[\text{um 2 nach links und um 1 nach unten}]{\text{Verschiebung}} \boxed{y = \frac{2}{x+2} - 1}$$

Ergebnis: $f_5(x) = \frac{2}{x+2} - 1 = \frac{2}{x+2} - \frac{x+2}{x+2} = \frac{-x}{x+2}$

1.4 Kompliziertere gebrochen rationale Funktionen:

Dieser Abschnitt setzt fundierte Kenntnisse über diese Kurven voraus (siehe Text 18081).
Daher entfällt in diesem eine ausführliche Erklärung sowie Aufgaben.



K_6 hat die senkrechten Asymptoten x = -2 und x = 1.

Daher steht im Nenner $(x+2)(x-1)$.

Der Grad des Zählers muss kleiner als der Nennergrad sein. Da man die Nullstelle x = 0 erkennt, könnte man ansetzen mit $f_6(x)=\frac{x}{(x+2)(x-1)}$.

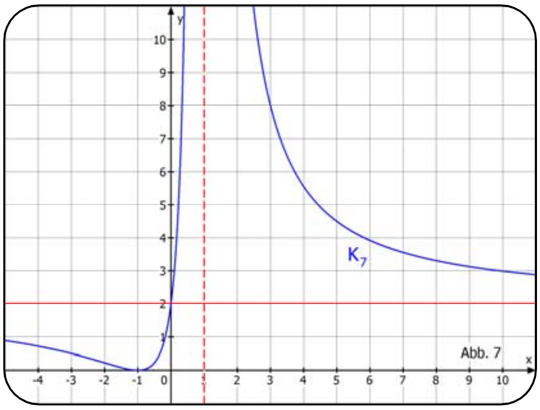
Man muss aber einen Streckfaktor k noch beachten:

Ansatz: $f_6(x)=\frac{kx}{(x+2)(x-1)}$.

Zur Bestimmung von k macht man die Punktprobe mit $A\left(2\,|\,\frac{1}{2}\right)$:

$f(2)=\frac{k\cdot 2}{4\cdot 1}=\frac{1}{2}k$ und das muss $\frac{1}{2}$ sein. Also folgt: k = 1.

Ergebnis: $f_6(x)=\frac{x}{(x+2)(x-1)}$



Die Kurve K_7 hat die senkrechte Asymptote x = 1 ohne Vorzeichenwechsel und eine doppelte Nullstelle -1.

Das bringt den Ansatz: $f_7(x)=\frac{k\cdot(x+1)^2}{(x-1)^2}$.

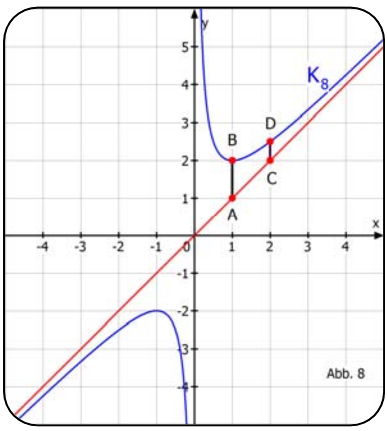
Man erhält k = 2, entweder, wenn man erkennt, dass y = 2 die waagrechte Asymptote ist, denn

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=k\cdot\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}=k\cdot\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=k\cdot 1=k$

Durch Vergleich folgt k = 2)

Oder man erkennt, dass $f(0)=2$ ist und bestimmt $f(0)=\frac{k\cdot 1}{1}=k \;\Rightarrow\; k=2$

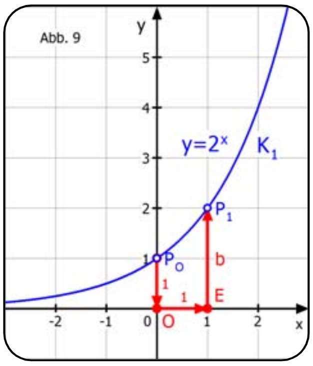
Ergebnis: $f_7(x)=\frac{2\cdot(x+1)^2}{(x-1)^2}$



$f_8(x)=x+\frac{1}{x}$

Erklärung Von der Ursprungsgeraden y = x geht es
bei x = 1 um 1 nach oben,
bei x = 2 um $\frac{1}{2}$ nach oben
bei x um $\frac{1}{x}$ nach oben.

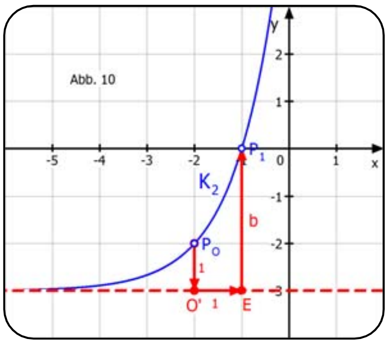
1.5 Elementare Exponentialfunktionen



Das Schaubild jeder elementaren Exponentialfunktion $f(x) = b^{rx+s}$ „besitzt" ein <u>charakteristisches</u> (krummliniges) <u>Trapez</u>.

Abb. 9 zeigt dies für die Funktion $f_1(x) = 2^x$:

Man beginnt mit $P_O(0|1)$, der von der waagrechten Asymptote (x-Achse) den Abstand 1 hat. Dann geht man senkrecht zur Asymptote nach O.
. Von da um 1 nach rechts bis $E(1|0)$ und dann nach $P_1(1|2^1 = 2)$
Zusammen mit dem Kurvenbogen P_1P_O entsteht ein krummliniges Trapez.

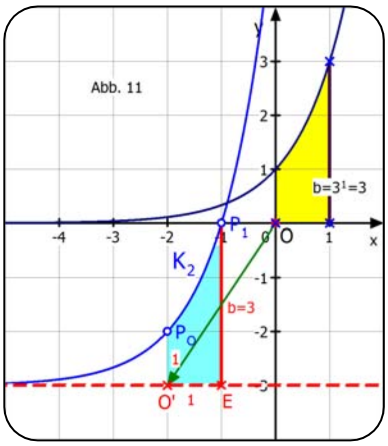


Dieses ist charakteristisch für die spezielle Funktion. **Beispiel:**
Ich verrate zuerst: Die dargestellte Funktion lautet $f_2(x) = 3^{x+2} - 3$.
Man erkennt an Hand der Gleichung sofort, dass die Kurve $y = 3^x$ zugrunde liegt. Und wer ein klein wenig Erfahrung mit Verschiebungen hat, erkennt auch, dass diese Grundkurve um 2 nach links und um 3 nach unten verschoben worden ist.
Nun gehen wir den umgekehrten Weg: Wie bestimmt man in Abb. 10 die Gleichung der Kurve?

1. Schritt: Waagrechte Asymptote ist $y = -3$
2. Schritt: Man bestimmt den Kurvenpunkt P_O, der um 1 oberhalb dieser Asymptoten liegt.
3. Schritt: Zeichne das charakteristische Trapez ein: Gehe von P_O um 1 nach unten zur Asymptote (Punkt $O'(-2|-3)$), dann um 1 nach rechts zu E.
Dann nach oben zur Kurve bis P_1. Die Strecke EP_1 hat die Länge 3:
b = 3 ist die Basis der Funktion.

Ergebnis: $f_2(x) = 3^{x+2} - 3$
Die +2 im Exponenten besagt: Verschiebung um 2 nach links.
Die -3 besagt: Verschiebung um 3 nach unten.

Abb. 11 zeigt auf die Richtigkeit des Vorgehens:



Oben ist die Kurve $y = 3^x$ eingezeichnet, zusammen mit dem charakteristischen Trapez (gelb) und der Seite b = 3 (Basis), denn $f(1) = 3^1 = 3$ ist die Basis.
Dann erkennt man den Verschiebungspfeil $\overrightarrow{OO'}$, der aus der Kurve $y = 3^x$ die Kurve $y = 3^{x+2} - 3$ macht und das gelbe Trapez in das blaue überführt. Und dieses blaue Trapez hat rechts die Seite b mit der Länge 3.

Abb. 12 enthält zwei Kurven, deren Gleichungen man anhand der charakteristischen Trapeze aufstellen kann:

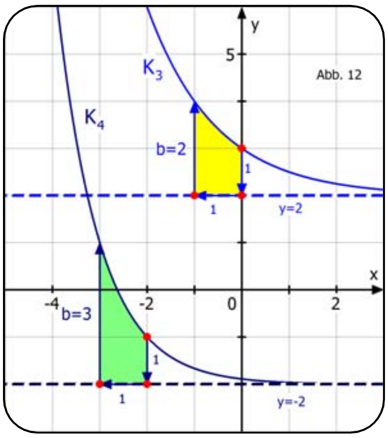


Abb. 12

Die obere Kurve entsteht aus $y = 2^{-x}$ durch Verschiebung um 2 in y-Richtung: $y = 2^{-x} + 2$

Die untere Kurve hat die Basis 3, entsteht also aus $y = 3^{-x}$ durch eine Verschiebung um 2 nach links und 2 nach unten.
Jetzt ACHTUNG:

So ist es richtig: $y = 3^{-(x+2)} - 2 = 3^{-x-2}$

So ist es falsch: $y = 3^{-3+2} - 2$.

Man muss den durch die Verschiebung nach links bedingten Summanden +2 zu x addieren und benötigt daher eine Klammer: -(x+2), was dann zu –x-2 führt.
Wenn man +2 zu –x addiert, entsteht der Term -x+2, und das ist falsch (was man z. B. durch eine Wertetafel oder das Schaubild eines Rechners überprüfen kann) – für Ungläubige ☺.

Abb. 13 zeigt zwei Kurven die vor der Verschiebung der Grundkurve zuerst an der x-Achse gespiegelt worden sind:

K_5 entsteht aus $y = -2^x$ durch Verschiebung um 4 in y-Richtung: $y = -2^x + 4$.

K_6 entsteht aus $y = -3^{-x}$ durch Verschiebung um 2 in y-Richtung: $y = -3^{-x} + 2$

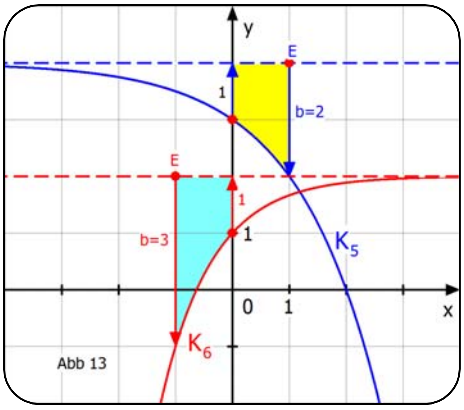


Abb 13

Zum Abschluss noch zwei schwere Aufgaben:

K_7 entsteht so:

$$\boxed{y = 2^x} \xrightarrow[\text{an x-Achse}]{\text{Spiegelung}} \boxed{y = -2^x} \xrightarrow[\text{um 4 nach oben, um 2 nach rechts}]{\text{Verschgiebung}} \boxed{y = -2^{x-2} + 4}$$

K_8 entsteht so:

$$\boxed{y = 3^{-x}} \xrightarrow[\text{an x-Achse}]{\text{Spiegelung}} \boxed{y = -3^{-x}} \xrightarrow[\text{um 2 nach oben, um 3 nach links}]{\text{Verschgiebung}} \boxed{y = -3^{-(x+3)} + 2}$$

was man umformen kann in $y = -3^{-x-3} + 2$

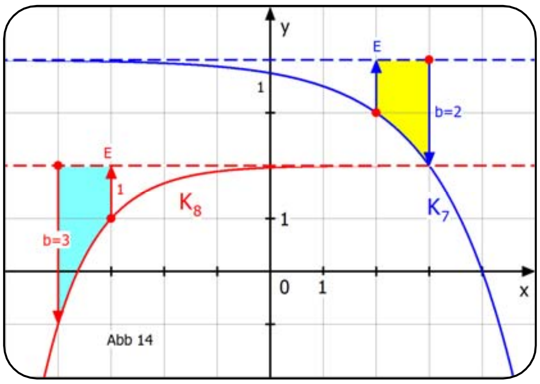


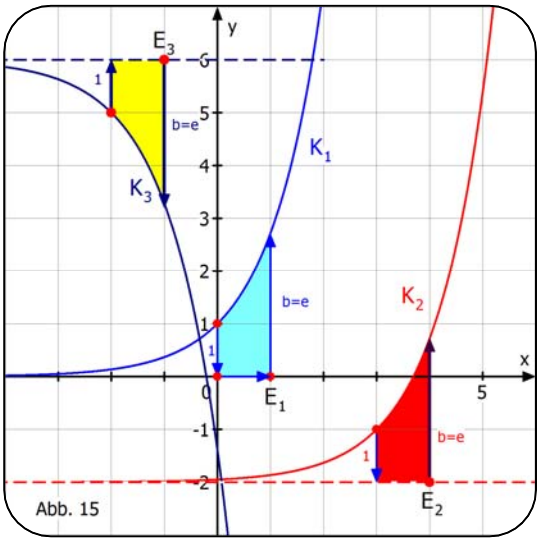
Abb 14

Hinweis:
Man könnte fragen, warum hier kein Streckfaktor in y-Richtung vorkommt. Der Grund: Eine Streckung in y-Richtung kann durch eine Verschiebung in x-Richtung ersetzt werden!!!

Beispiel: $y = 2^{x-3} = 2^x \cdot 2^{-3} = 2^x \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} \cdot 2^x$

Und eine in x-Richtung gestreckte Kurve kann durch ein ungestreckte Kurve mit anderer Basis dargestellt werden: $y = 2^{3x} = \left(2^3\right)^x = 8^x$. D. h. wenn man $y = 2^x$ mit dem Faktor $k = \frac{1}{3}$ in x-Richtung streckt (besser: staucht), dann entsteht die Kurve $y = 8^x$. Daher berücksichtigt man bei der Identifizierung von Exponentialkurven keine Streckfaktoren.

1.6 Exponentialfunktionen mit Basis e



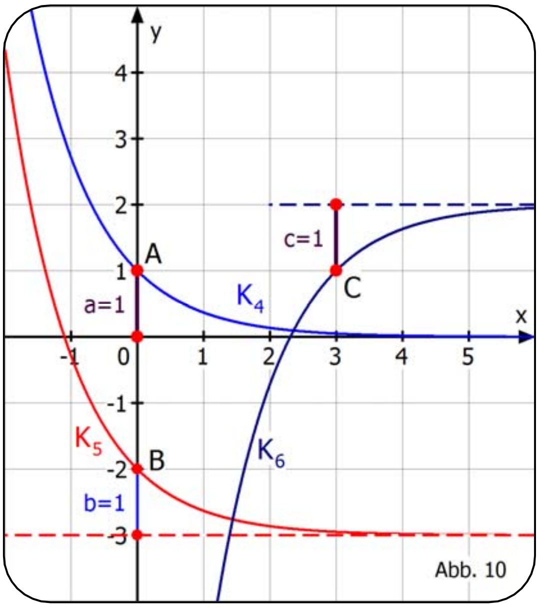
In der Oberstufe wird die Basis $e = 2{,}71828...$ (Eulersche Zahl) als Basis verwendet.
Hier einige Beispiele dazu:

K_1 gehört zur Grundfunktion $f_1(x) = e^x$:
Sie hat die negative x-Achse zur Asymptote und geht durch $(0\,|\,1)$. Ich habe dann das charakteristische Trapez eingezeichnet: Von $(0\,|\,1)$ um 1 auf die Asymptote zu, dann um 1 nach rechts, dann geht es um $f(1) = e$ nach oben. Die Strecke vom Punkt E_1 nach oben hat stets die Länge e der Basis.

K_2 erkennt man gleich als verschobene Kurve K_1. Dazu sucht man den Punkt, der um 1 oberhalb der waagrechten Asymptote y = -2 liegt: $(3\,|\,-1)$. Man erkennt dann schon die Verschiebung: um 3 nach rechts und um 2 nach unten: $f_2(x) = e^{x-3} - 2$.

K_3 entsteht, indem man K_1 zuerst an der x-Achse spiegelt und dann um 6 nach oben und um 2 nach links verschiebt: $f_3(x) = -e^{x+2} + 6$

Eine weitere Grundfunktion ist $f_4(x) = e^{-x}$. Ihr Schaubild K_4 hat die positive x-Achse als Asymptote.



K_5 entsteht daraus durch Verschiebung von K_4 um 3 nach unten. A geht dann in B über, der um 1 oberhalb der Asymptote y = -3 liegt: $f_5(x) = e^{-x} - 3$

K_6 entsteht aus K_4 zuerst durch Spiegelung an der x-Achse und dann Verschiebung um 3 nach rechts und um 2 nach oben (dies sieht man an der waagrechten Asymptote y = 2 oder daran, dass der gespiegelte Punkt $A'(0\,|\,-1)$ nach $C(3\,|\,1)$ verschoben wird: $f_6(x) = -e^{-(x-3)} + 2 = 2 - e^{3-x}$.

1.7 Logarithmuskurven

usw.

auf der CD